Ushtrimi nr. 1

Të zgjidhet ekuacioni : $\sqrt{3x^2-20x+16} = x-4$

Zgjidhje

Që $x \in \mathbb{R}$, të jetë zgjidhje e këtij ekuacioni, duhet që:

$$\begin{cases} 3x^2-20x+16 \geq 0 \\ x-4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{10-\sqrt{52}}{3} \text{ ose } x > \frac{10+\sqrt{52}}{3} \\ x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{10+\sqrt{52}}{3}$$

Tek ekuacioni $\sqrt{3x^2-20x+16} = x-4$, ngremë në katror anë për anë:

$$3x^2-20x+16 = (x-4)^2 \Leftrightarrow$$

$$3x^2-20x+16 = x^2-8x+16 \Leftrightarrow$$

$$2x^2-12x = 0 \Leftrightarrow$$

$$2x \cdot (x-6) = 0 \Rightarrow x=0 \text{ ose } x=6.$$

$x=0$ nuk plotëson kushtin : $x > \frac{10+\sqrt{52}}{3}$; prandaj nuk është zgjidhje

$x=6$ plotëson kushtin : $x > \frac{10+\sqrt{52}}{3}$; prandaj $x=6$ është zgjidhje

Ushtrimi nr. 2

Të zgjidhen ekuacionet irracionale:

a) $2\sqrt{x+5} = x+2$

Që $x \in \mathbb{R}$ të jetë zgjidhje e këtij ekuacioni, duhet që:

$$\begin{cases} x+5 \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -5 \\ x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -2$$

Tek ekuacioni $2\sqrt{x+5} = x+2$, ngremë në katror anë për anë:

$$(2\sqrt{x+5})^2 = (x+2)^2 \Leftrightarrow$$

$$4(x+5) = x^2+4x+4 \Leftrightarrow$$

$$\cancel{4x}+20 = x^2+\cancel{4x}+4 \Leftrightarrow$$

$$x^2-16=0 \Leftrightarrow$$

$$(x-4)(x+4)=0 \Rightarrow$$

$$x=4 \text{ ose } x=-4$$

- $x=4$ plotëson kushtin $x \geq -2 \Rightarrow$ është zgjidhje
- $x=-4$ nuk plotëson kushtin $x \geq -2 \Rightarrow$ nuk është zgjidhje

b) $\sqrt{x+2} - \sqrt{2x-3} = 1$

$x \in \mathbb{R}$ eshte zgjidhje $\Rightarrow \begin{cases} x+2 > 0 \\ 2x-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x > \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{x > \frac{3}{2}}$ ①

$\sqrt{x+2} - \sqrt{2x-3} = 1 \Leftrightarrow$

$\sqrt{x+2} = 1 + \sqrt{2x-3} \Rightarrow$

$x+2 = \left(1+\sqrt{2x-3}\right)^2 \Leftrightarrow$

$x+2 = 1 + 2\sqrt{2x-3} + 2x-3 \Leftrightarrow$

$x+2-1-2x+3 = 2\sqrt{2x-3} \Leftrightarrow$

$-x+4 = 2\sqrt{2x-3} \Rightarrow \quad \boxed{x \leq 4}$ ②

$(-x+4)^2 = 4\cdot(2x-3) \Leftrightarrow$

$x^2 - 8x + 16 = 8x - 12 \Leftrightarrow$

$x^2 - 16x + 28 = 0$

$x_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{16^2 - 4\cdot 1\cdot 28}}{2} \begin{matrix} \nearrow 14 \\ \searrow 2 \end{matrix}$

$x_1 = 14$ nuk eshte zgjidhje sepse nuk i ploteson te dyja kushtet 1 dhe 2

$x_2 = 2$, eshte zgjidhje, sepse i ploteson te dyja kushtet 1 dhe 2, mqe

$\frac{3}{2} < 2 \leq 4$

c) $\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3} = 1$

$x \in \mathbb{R}$ zgjidhje $\Rightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 2x+3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -1$

$\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3} = 1 \Leftrightarrow$

$\sqrt{2x+3} = 1 - \sqrt{x+1} \Rightarrow$

$2x+3 = 1 - 2\sqrt{x+1} + x+1 \Leftrightarrow$

$2x+3-1-x-1 = -2\sqrt{x+1} \Leftrightarrow$

$x+1 = -2\sqrt{x+1}$

$(x+1)+2\sqrt{x+1}=0 \Leftrightarrow$

$\sqrt{x+1}\,(\underbrace{\sqrt{1+x}+2}_{>0})=0 \Leftrightarrow$

$\sqrt{x+1}=0 \Leftrightarrow$

$x+1=0 \Leftrightarrow$

$x=-1.$

Meqe $x=-1$ ploteson kushtin : $x \geq -1 \Rightarrow x=-1$ eshte zgjidhje

Ushtrimi nr.3 : Te zgjidhet ekuacioni :

$$\frac{x+2}{\sqrt{x}-1}-\sqrt{x}=4$$

Zgjidhje

$x\in\mathbb{R}$ eshte zgjidhje $\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ \sqrt{x}-1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ \sqrt{x}\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x\in[0,1)\cup(1,+\infty)$

$\frac{x+2}{\sqrt{x}-1}-\sqrt{x}=4 \Leftrightarrow$

$\frac{x+2}{\sqrt{x}-1}=4+\sqrt{x} \Leftrightarrow$

$x+2=(4+\sqrt{x})(\sqrt{x}-1) \Leftrightarrow$

$x+2=4\sqrt{x}-4+x-\sqrt{x} \Leftrightarrow$

$x+2=3\sqrt{x}-4+x \Leftrightarrow$

$x+2+4-x=3\sqrt{x} \Leftrightarrow$

$6=3\sqrt{x} \Leftrightarrow$

$\sqrt{x}=2$

$x=4$

Meqë $x=4$ ploteson kushtin që $x\in[0,1)\cup(1,+\infty)$

$\Rightarrow x=4$ eshte zgjidhje

Ushtrimi nr. 4

Të zgjidhet ekuacioni: $3+\sqrt{2x^2-4x+9}=2x$

$x\in\mathbb{R}$ është zgjidhje $\Rightarrow \begin{cases} 2x^2-4x+9\geq 0 \\ 2x-3\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ x\geq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x\geq \frac{3}{2}$

$3+\sqrt{2x^2-4x+9}=2x \Leftrightarrow$

$\sqrt{2x^2-4x+9}=2x-3 \Rightarrow$

$2x^2-4x+9=(2x-3)^2 \Leftrightarrow$

$2x^2-4x+9=4x^2-12x+9 \Leftrightarrow$

$2x^2-8x=0 \Leftrightarrow$

$2x(x-4)=0 \Leftrightarrow$

$x=0$ ose $x=4$

- Meqe $x=0$ nuk ploteson kushtin $x\geq\frac{3}{2} \Rightarrow$ nuk eshte zgjidhje
- Meqe $x=4$ ploteson kushtin $x\geq\frac{3}{2} \Rightarrow x=4$ eshte zgjidhje

Ushtrimi nr. 5

Te zgjidhet ekuacioni: $\sqrt{2x+14}=\sqrt{x+5}+\sqrt{x-7}$

$x\in\mathbb{R}$ eshte zgjidhje $\Rightarrow \begin{cases} 2x+14\geq 0 \\ x+5\geq 0 \\ x-7\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -7 \\ x\geq -5 \\ x\geq 7 \end{cases} \Leftrightarrow x\geq 7$

$\sqrt{2x+14}=\sqrt{x+5}+\sqrt{x-7} \Rightarrow$

$2x+14=x+5+2\cdot\sqrt{x+5}\cdot\sqrt{x-7}+x-7 \Leftrightarrow$

$\cancel{2x}+14=\cancel{2x}-2+2\sqrt{(x+5)(x-7)} \Leftrightarrow$

$16=2\cdot\sqrt{(x+5)(x-7)} \Rightarrow$

$8=\sqrt{(x+5)(x-7)} \Leftrightarrow$

$64=(x+5)(x-7) \Leftrightarrow$

$64=x^2-7x+5x-35$

$x^2-2x-99=0$

$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+99}}{1}$ ⟨ 11, -9

$x_1=11\geq 7 \Rightarrow x_1=11$ eshte zgjidhje

$x_2=-9<7 \Rightarrow x_2=-9$ nuk eshte zgjidhje

Ushtrumi nr. 6

Te zgjidhet ekuacioni : $\sqrt{2x^2+7} = x^2-4$

$x \in \mathbb{R}$ zgjidhje $\Rightarrow \quad x^2-4>0 \Leftrightarrow x^2>4 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

$$\sqrt{2x^2+7} = x^2-4 \Rightarrow$$
$$2x^2+7 = (x^2-4)^2 \Leftrightarrow$$
$$2x^2+7 = x^4 - 8x^2+16 \Leftrightarrow$$
$$x^4 - 10x^2+9 = 0 \quad \text{(Ekuacion bikuadratik)}$$

Zv. $x^2=y \Rightarrow \quad y^2 - 10y+9=0 \Rightarrow {}_1y_2 = \dfrac{10 \pm \sqrt{10^2-4\cdot 1\cdot 9}}{2} \begin{cases} 9 \\ 1 \end{cases}$

$x^2 = 9 \Rightarrow \quad x_1 = 3, \quad x_2 = -3$

$x^2 = 1 \Rightarrow \quad x_3 = 1, \quad x_4 = -1$

Shohim që $\quad x_3, x_4 \notin (-\infty, -2) \cup (2, +\infty) \Rightarrow$ nuk jane zgjidhje

Ndërsa $\quad x_1, x_2 \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty) \Rightarrow$ jane zgjidhje

Ushtrimi nr. 7

Te zgjidhet ekuacioni : $\sqrt{4+15x} + \sqrt{17x+13} = \sqrt{77x-6}$

Zgjidhje

$x \in \mathbb{R}$ zgjidhje $\Rightarrow \begin{cases} 4+15x \geq 0 \\ 17x+13 \geq 0 \\ 77x-6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{4}{15} \\ x \geq -\frac{13}{17} \\ x \geq \frac{6}{77} \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{x \geq \frac{6}{77}}$ 1

$$\sqrt{4+15x} + \sqrt{17x+13} = \sqrt{77x-6} \Rightarrow$$
$$(4+15x) + 2\cdot\sqrt{4+15x}\cdot\sqrt{17x+13} + (17x+13) = 77x-6 \Leftrightarrow$$
$$2\cdot\sqrt{(4+15x)(17x+13)} = 77x-6-4-15x-17x-13 \Leftrightarrow$$

2

$$2\cdot\sqrt{(4+15x)(17x+13)} = 45x-23 \quad \left(\Rightarrow 45x-23 \geq 0 \Leftrightarrow \boxed{x \geq \frac{23}{45}}\right) \Leftrightarrow$$
$$4\cdot(4+15x)(17x+13) = (45x-23)^2 \Leftrightarrow$$
$$4\cdot\left[255x^2 + (68+195)x + 52\right] = 2025x^2 - 2070x + 529 \Leftrightarrow$$
$$1020x^2 + 1052x + 208 = 2025x^2 - 2070x + 529 \Leftrightarrow$$

$1005x^2 - 3122x + 321 = 0 \Rightarrow$

$$x_{1,2} = \frac{1561 \pm \sqrt{1561^2 - 1005 \cdot 321}}{1005} \quad \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = \frac{107}{1005} \approx 0{,}1064\ldots \end{cases}$$

Shohim që $x_1 = 3$ plotëson kushtet 1 dhe 2 $\Rightarrow$ $x_1 = 3$ është zgjidhje

Ndërsa $x_2 = \frac{107}{1005}$ nuk plotëson kushtin 2 $\Rightarrow$ nuk është zgjidhje

Sistemet e ekuacioneve lineare të tipit 2×2, 3×3.

Le të kemi sistemin me 2 ekuacione lineare, me dy ndryshore:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 - a_2 b_1$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 \cdot b_2 - c_2 b_1$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot c_2 - a_2 \cdot c_1$$

Rasti I: $\Delta \neq 0$

Sistemi ka vetëm një zgjidhje që është $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$

Rasti II: $\Delta = 0$

Në këtë rast sistemi mund të ketë ose pafundësi zgjidhjesh ose nuk ka zgjidhje fare.

Kjo metodë për zgjidhjen e sistemeve të ekuacioneve lineare katrore quhet metoda e Kramerit.

Ushtrimi nr.1

Të zgjidhet sistemi i ekuacioneve lineare me anë të metodës së:
a) zëvendësimit b) Gausit c) Kramerit

$$\begin{cases} 2x-3y=-4 \\ -x+y=-3 \end{cases}$$

Zgjidhje

a) Metoda e zëvendësimit

$$\begin{cases} 2x-3y=-4 \\ -x+y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\cdot x-3\cdot(x-3)=-4 \\ y=x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3x+9=-4 \\ y=x-3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -x=-13 \\ y=x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=13 \\ y=10 \end{cases} \Rightarrow$$ (13,10) është zgjidhje e sistemit

b) Metoda e Gausit

$$\begin{cases} 2x-3y=-4 \\ -x+y=-3 \end{cases} \xrightarrow{\text{rreshti dytë}\cdot 2+\text{rreshti i parë}} \begin{cases} 2x-3y=-4 \\ -y=-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=3\cdot 10-4 \\ y=10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=13 \\ y=10 \end{cases} \Rightarrow$$ (13,10) është zgjidhje e sistemit

c) Metoda e Kramerit

$$\begin{cases} 2x-3y=-4 \\ -x+y=-3 \end{cases}$$

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 1-(-1)(-3)=-1\neq 0$$

$$D_x=\begin{vmatrix} -4 & -3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = (-4)\cdot 1-(-3)\cdot(-3)=-13 \Rightarrow x=\frac{D_x}{D}=\frac{-13}{-1}=13$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 2\cdot(-3)-(-4)\cdot(-1)=-10 \Rightarrow y=\frac{D_y}{D}=\frac{-10}{-1}=10$$

$\Rightarrow$ (13,10) është zgjidhje e sistemit.

Ushtrimi nr.2

Në vlerësi të parametrat real a, të zgjidhet me metodën e Kramerit, sistemi:

$$\begin{cases} ax+y=1 \\ x+ay=a^2 \end{cases}$$

Zgjidhje

$$D=\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix}= a\cdot a-1\cdot 1= a^2-1$$

$$D_x=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a^2 & a \end{vmatrix}= 1\cdot a-1\cdot a^2= a-a^2$$

$$D_y=\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a^2 \end{vmatrix}= a\cdot a^2-1\cdot 1= a^3-1$$

Dallojmë rastet e mëposhtme:

Rasti I: $D\neq 0$ pra $a^2-1\neq 0 \Leftrightarrow a\neq \pm 1$ ka një zgjidhje të vetme:

Në këtë rast, sistemi

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{a-a^2}{a^2-1}=\frac{a(1-a)}{(a-1)(a+1)}=-\frac{a}{a+1}$$

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{a^3-1}{a^2-1}=\frac{\cancel{(a-1)}(a^2+a+1)}{\cancel{(a-1)}(a+1)}=\frac{a^2+a+1}{a+1}$$

Rasti II: $D=0$ pra $a^2-1=0 \Leftrightarrow a=\pm 1$

Nënrasti I: $a=1 \Rightarrow$ sistemi merr trajtën $\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow x+y=1 \Leftrightarrow$ $y=1-x \Rightarrow$ çdo çift $(x,y)=(x,1-x)$, $x\in R$ është zgjidhje $\Rightarrow$ sistemi ka pafundësi zgjidhjesh

Nënrasti II: $a=-1 \Rightarrow$ sistemi merr trajtën: $\begin{cases} -x+y=1 \\ x-y=1 \end{cases} \Rightarrow$

$(-x+y)+(x-y)=1+1 \Leftrightarrow 0=2$ që është absurditet

Kjo tregon që sistemi nuk ka zgjidhje.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

H

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}; \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

I. $\Delta \neq 0 \Rightarrow$ sistemi ka vetëm një zgjidhje. $x = \frac{\Delta x}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta y}{\Delta}$ dhe $z = \frac{\Delta z}{\Delta}$.

II. $\Delta = 0$ atëherë sistemi ose nuk ka zgjidhje ose ka pafundësi zgjidhjesh.

1. Të zgjidhet sistemi i ekuacioneve lineare duke shfrytëzuar metodën e zëvendësimit, metodën e Gausit dhe metodën e Kramerit.

a]

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = -4 \\ -x + y - 2z = -3 \\ 3x + 4y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 3y - 2x - 4 \\ -x + y - 2(3y - 2x - 4) = -3 \\ 3x + 4y + 3y - 2x - 4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 3y - 2x - 4 \\ 3x - 5y = -11 \\ x + 7y = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = 3y - 2x - 4 \\ 3(5 - 7y) - 5y = -11 \\ x = 5 - 7y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 3y - 2x - 4 \\ -26y = -26 \\ x = 5 - 7y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 3(1) - 2(-2) - 4 \\ y = 1 \\ x = 5 - 7 \cdot 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

b]

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = -4 \,/\cdot(-2) \\ -x + y - 2z = -3 \,/ \\ 3x + 4y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x + 6y + 2z = 8 \\ -x + y - 2z = -3 \\ 3x + 4y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = -4 \\ -2x + 2y - 4z = -6 \\ 3x + 4y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y + z = -4 \,/3 \\ -y - 3z = -10 \\ 3x + 4y + z = 1 \,/(-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x - 9y + 3z = -12 \\ +y + 3z = 10 \\ -6x - 8y - 2z = -2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y + z = -4 \\ y + 3z = 10 \\ -17y + z = -14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y + z = -4 \\ 17y + 51z = 170 \\ -17y + z = -14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y + z = -4 \\ y + 3z = 10 \\ 52z = 156 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y + z = -4 \\ y + 3z = 10 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y + z = -4 \\ y = 10 - 3 \cdot 3 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3 + 3 = -4 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

k]

$$\Delta = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & -3 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right. = 2 + 18 - 4 - 3 + 16 - 3 = 36 - 10 = 26 \neq 0$$

$$\Delta_x = \left|\begin{array}{ccc|cc} -4 & -3 & 1 & -4 & -3 \\ -3 & 1 & -2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right. = -4 + 6 - 12 - 1 - 32 - 9 = -52$$

$$\Delta_y = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & -4 & 1 & 2 & -4 \\ -1 & -3 & -2 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right. = -6 + 24 - 1 + 9 + 4 - 4 = 26$$

$$\Delta_z = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & -3 & -4 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right. = 2 + 27 + 16 + 12 + 24 - 3 = 78$$

$$\Rightarrow x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = -2 \; ; \; y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 1 \; ; \; z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = 3 .$$

---

2. Në varësi të parametrit λ të zgjidhet sistemi i ekuacioneve:

$$\begin{cases} \lambda x + 2y + 4z = \lambda + 1 \\ x - 3y + 2z = -4 \\ 3x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

z]

$$\Delta = \left|\begin{array}{ccc|cc} \lambda & 2 & 4 & \lambda & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right. = -6\lambda + 12 - 4 + 36 + 2\lambda - 4 = -4\lambda + 40$$
$$= -4(\lambda - 10)$$

$$\Delta_x = \left|\begin{array}{ccc|cc} \lambda+1 & 2 & 4 & \lambda+1 & 2 \\ -4 & -3 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right. = -6(\lambda+1) + 16 + 2(\lambda+1) + 16 = -4\lambda + 28$$
$$= -4(\lambda - 7)$$

$$\Delta_y = \left|\begin{array}{ccc|cc} \lambda & \lambda+1 & 4 & \lambda & \lambda+1 \\ 1 & -4 & 2 & 1 & -4 \\ 3 & 0 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right. = -8\lambda + 6(\lambda+1) + 48 - 2(\lambda+1) = -4\lambda + 52$$
$$= -4(\lambda - 13)$$

$$\Delta_z = \left|\begin{array}{ccc|cc} \lambda & 2 & \lambda+1 & \lambda & 2 \\ 1 & -3 & -4 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 0 & 3 & -1 \end{array}\right. = -24 - (\lambda+1) + 9(\lambda+1) - 4\lambda = 4\lambda - 16 = 4(\lambda - 4)$$

Rasti I: $D \neq 0$ pra $-4(\lambda-10) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 10$

Ne kete rast sistemi ka vetem nje zgjidhje:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-\cancel{4}(\lambda-7)}{-\cancel{4}(\lambda-10)} = \frac{\lambda-7}{\lambda-10}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-\cancel{4}(\lambda-13)}{-\cancel{4}(\lambda-10)} = \frac{\lambda-13}{\lambda-10}$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{4(\lambda-4)}{-4(\lambda-10)} = -\frac{\lambda-4}{\lambda-10}$$

Rasti II: $D=0$ pra $-4(\lambda-10)=0 \Leftrightarrow \lambda=10$

Ne kete rast, sistemi merr trajten:

$$\begin{cases} 10x + 2y + 4z = 11 \\ x - 3y + 2z = -4 \\ 3x - y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y + 2z = -4 \\ 3x - y + 2z = 0 \\ 10x + 2y + 4z = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y + 2z = -4 \\ -8y + 4z = -12 \quad (3R_1 - R_2) \\ -32y + 16z = -51 \quad (10R_1 - R_3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y + 2z = -4 \\ 2y - z = 3 \\ 2y - z = \frac{51}{16} \end{cases} \Rightarrow 3 = \frac{51}{16} \text{ qe eshte e pamundur} \Rightarrow$$

sistemi nuk ka zgjidhje.